

4

10-11

FIRST YEAR CIVIL

STRUCTURAL ANALYSIS

NORMAL STRESSES
(1)

2010 / 2011

7

NORMAL STRESSES

ال Normal stresses هي الاجهادات العمودية على القطاع و التي تنتج من
ال Straining actions العمودية على القطاع مثل (N, Mx, My) و سيتم
استعراض طرق حساب ال Straining actions في جميع
حالات ال Straining actions

1 - Case of normal force only :

$$F = \pm \frac{N}{A}$$

Where :

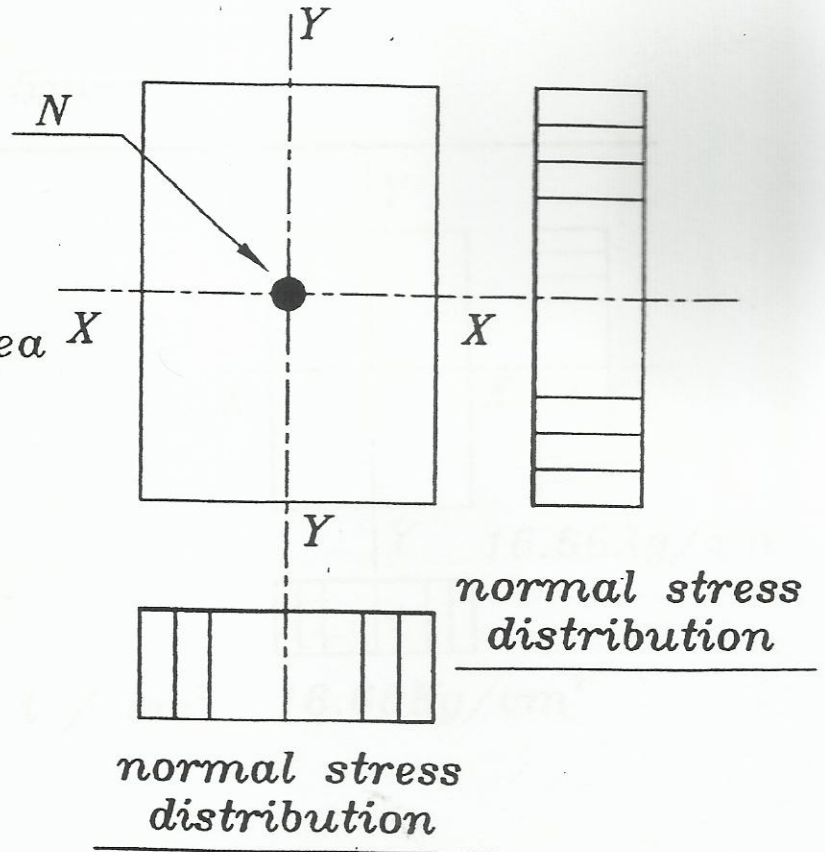
$F \rightarrow$ Normal stress

$N \rightarrow$ Normal Force

$A \rightarrow$ Cross section area

+Ve \rightarrow Tension

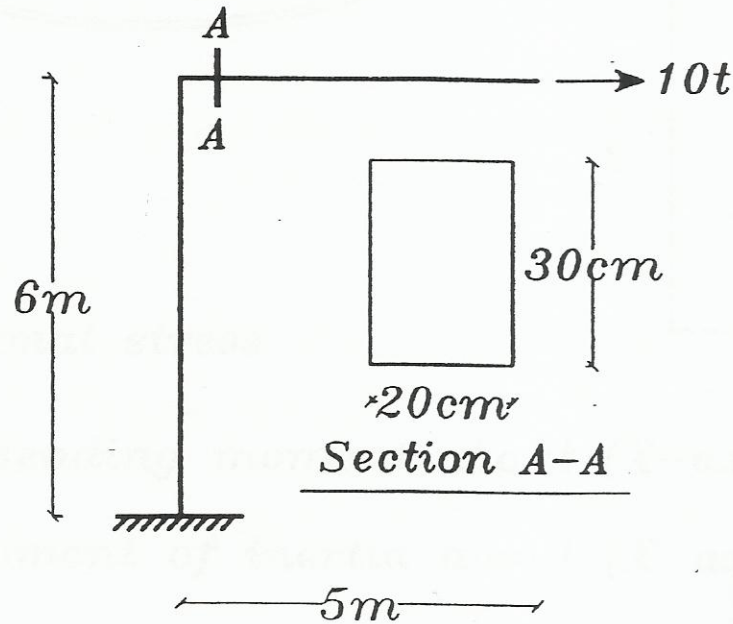
-Ve \rightarrow Compression



و هذه الحالة تسمى حالة Uniform stresses ويكون توزيع الاجهادات
متساوي على جميع نقط القطاع

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



$$N = + 10 \text{ t}$$

$$M_x = 0$$

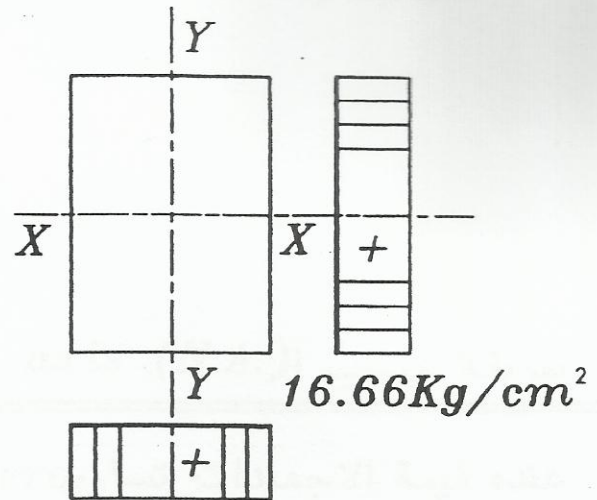
$$M_y = 0$$

Case of N only

$$A = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$F = + \frac{10}{600} = + 0.016 \text{ t / cm}^2 \quad 16.66 \text{ Kg/cm}^2$$
$$= + 16.66 \text{ Kg / cm}^2$$

Neutral axis (N.A.)



هو خط يمر في مستوي القطاع و يفصل بين منطقتين اجهادات (شد و ضغط)

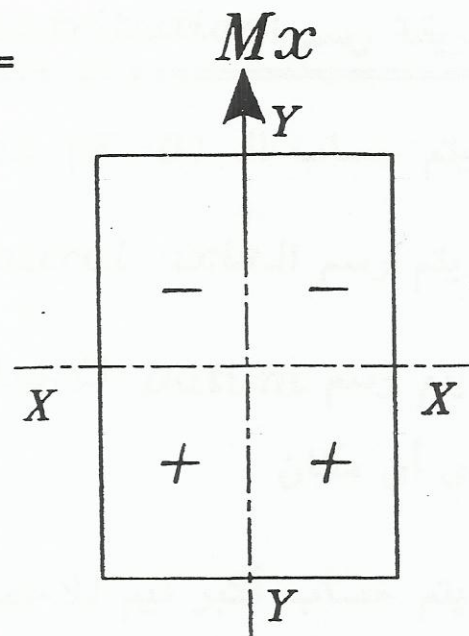
و يكون الـ اجهادات عليه تساوى صفر

و في حالة الـ Normal force only لا يوجد Neutral axis (N.A.)

لان الـ اجهادات كلها نوع واحد و لا تساوى صفر

- Case of (M x) only :

$$F = \pm \frac{Mx}{Ix} Y$$



Where :

$F \rightarrow$ Normal stress

$Mx \rightarrow$ Bending moment about (X-axis) حول محور X

$Ix \rightarrow$ moment of inertia about (X-axis) حول محور X

$Y \rightarrow$ The vertical distance between the point and the C.g

+Ve \rightarrow Tension

-Ve \rightarrow Compression

طريقة حساب الـ (N.A.) Neutral axis

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\frac{Mx}{Ix} Y = 0 \rightarrow Mx \neq 0, Ix \neq \infty \therefore Y = 0$$

بعد النقطة التي عندها قيمة الاجهادات تساوي صفر عن محور X

يساوي Zero

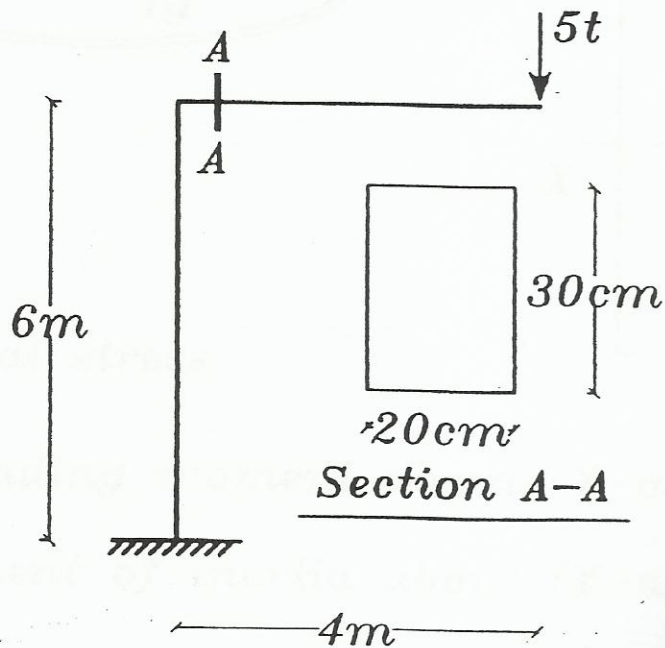
\therefore محور X هو الـ (N.A.) Neutral axis

طريقة رسم Normal stress distribution

- ١- يتم حساب ال $Neutral\ axis\ (F=0)$ و فى هذه الحالة هو محور X
- ٢- يتم رسم ال $Neutral\ axis$
- ٣- يتم رسم $Datum$ للاجهادات و يكون خط عمودى على ال $C.L.$ فى أى مكان
- ٤- يتم حساب أكبر قيم للاجهادات و فى هذه الحالة هى أبعد نقطة ناحية الشد (زيل السهم للعزوم) و تعطى $F_{max. tension}$ و أبعد نقطة ناحية الضغط (رأس السهم للعزوم) و تعطى $F_{max. compression}$

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



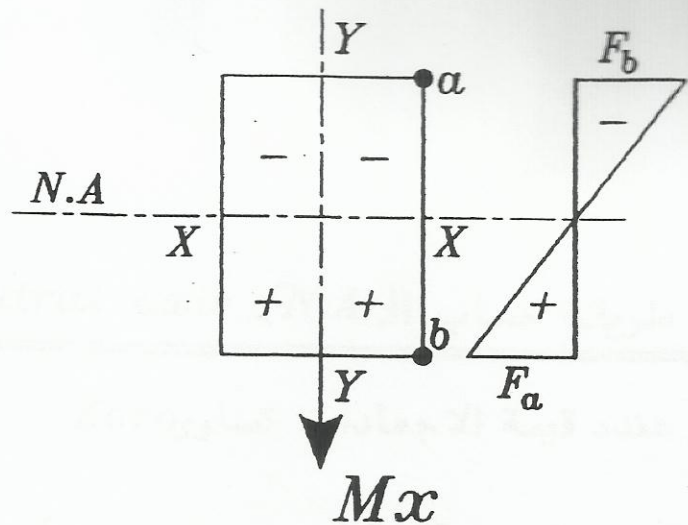
$$N = 0$$

$$M_x = 5 \times 4 = 20 \text{ m.t}$$

$$M_y = 0$$

Case of M_x only

$$20 \times 30^3$$



$$I_x = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$F_{\text{Max. comp.}} = F_a = - \frac{20 \times 10^5 \text{ Kg.cm}^2}{45000} \times 15$$

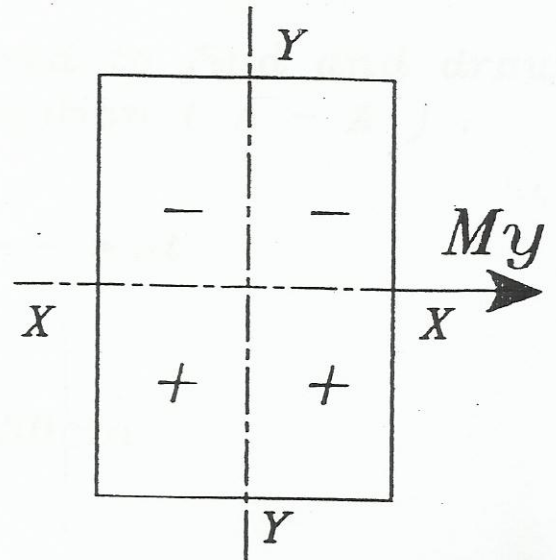
$$= - 666.66 \text{ Kg / cm}^2$$

$$F_{\text{Max. tension}} = F_b = + \frac{20 \times 10^5 \text{ Kg.cm}^2}{45000} \times 15$$

$$= + 666.66 \text{ Kg / cm}^2$$

- Case of (M_y) only :

$$F = \pm \frac{M_y}{I_y} X$$



Where :

$F \rightarrow$ Normal stress

$M_y \rightarrow$ Bending moment about (Y-axis) حول محور Y

$I_y \rightarrow$ moment of inertia about (Y-axis) حول محور Y

$X \rightarrow$ The horizontal distance between the point and the C.g

+Ve \rightarrow Tension

-Ve \rightarrow Compression

طريقة حساب (N.A.) Neutral axis

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\frac{M_y}{I_y} X = 0 \rightarrow M_y \neq 0, I_y \neq \infty \quad \therefore X = 0$$

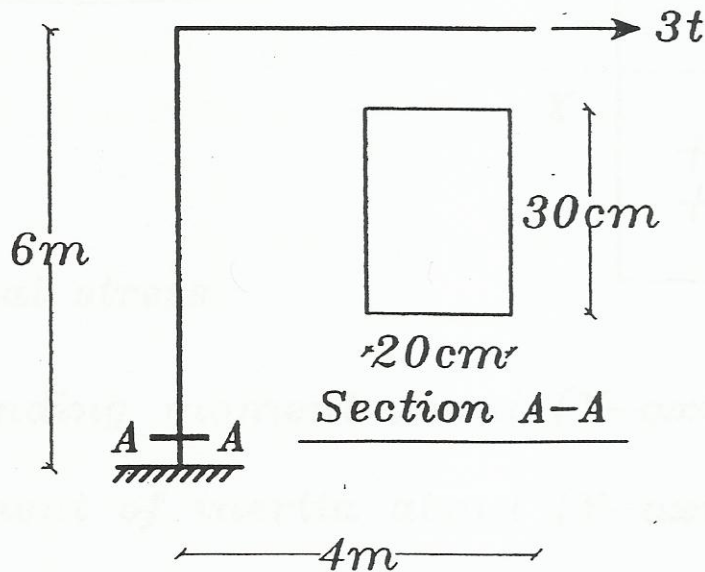
بعد النقطة التي عندها قيمة الاجهادات تساوي صفر عن محور Y

يساوي Zero

\therefore محور Y هو ال (N.A.) Neutral axis

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).

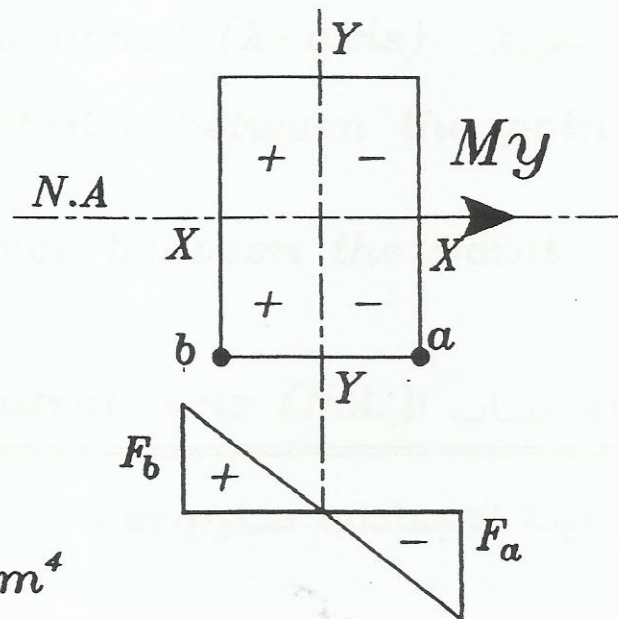


$$N = 0$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = 3 \times 6 = 18 \text{ m.t}$$

Case of M_y only
 20×30^3



$$I_x = \frac{30 \times 20^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$F_{\text{Max. comp.}} = F_a = - \frac{18 \times 10^5 \text{ Kg.cm}}{20000} \times 10$$

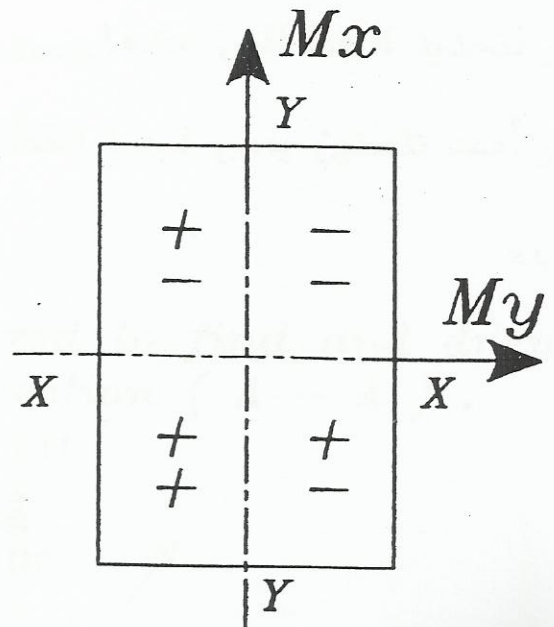
$$= - 900 \text{ Kg / cm}^2$$

$$F_{\text{Max. tension}} = F_b = + \frac{18 \times 10^5 \text{ Kg.cm}}{20000} \times 10$$

$$= + 900 \text{ Kg / cm}^2$$

- Case of (M_x , M_y) :

$$F = \pm \frac{M_x}{I_x} Y \pm \frac{M_y}{I_y} X$$



Where :

$F \rightarrow$ Normal stress

$M_y \rightarrow$ Bending moment about (Y-axis) حول محور Y

$I_y \rightarrow$ moment of inertia about (Y-axis) حول محور Y

$M_x \rightarrow$ Bending moment about (X-axis) حول محور X

$I_x \rightarrow$ moment of inertia about (X-axis) حول محور X

$X \rightarrow$ The horizontal distance between the point and the C.g

$Y \rightarrow$ The vertical distance between the point and the C.g

طريقة حساب الـ Neutral axis (N.A.)

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\frac{M_y}{I_y} X + \frac{M_x}{I_x} Y = 0 \quad \text{If } X = 0 \quad \therefore Y = 0$$

\therefore الـ Neutral axis هو خط يمر بالـ C.g. و يميل بزاوية α على محور X و

يمر بالاجزاء غير متشابهة الاشارة

$$\text{Where : } \tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{M_y}{I_y} \times \frac{I_x}{M_x}$$

و لتحديد النقط التي عندها $F_{Max.tension}$, $F_{Max.Comp.}$ يتم رسم موازي للـ N.A.

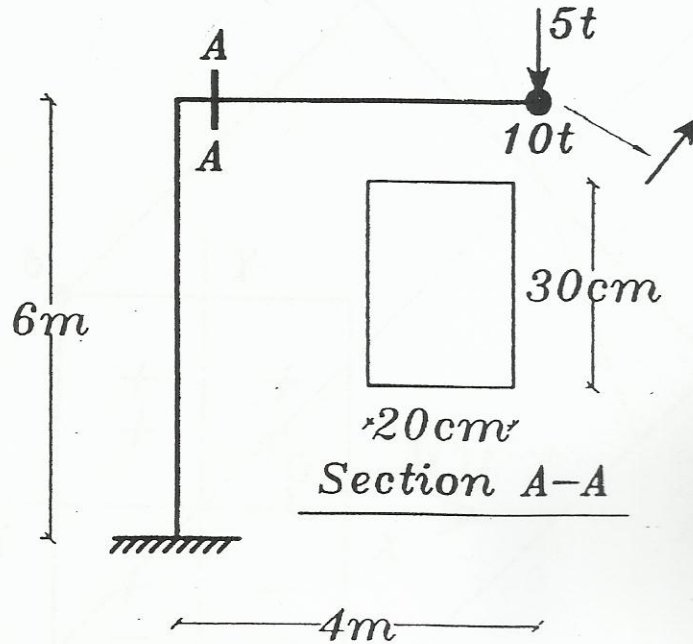
و أبعد نقطتين يمس فيهما القطاع يكون عندهم

و لتحديد النقط التي عندها $F_{Max.tension}$, $F_{Max.Comp.}$ يتم رسم موازى لل $N.A.$

و أبعد نقطتين يمر فيهما القطاع يكون عندهم $F_{Max.tension}$, $F_{Max.Comp.}$

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A) .



$$N = 0$$

$$M_x = 5 \times 4 = 20 \text{ m.t}$$

$$M_y = 10 \times 4 = 40 \text{ m.t}$$

Case of M_x , M_y

$$I_x = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

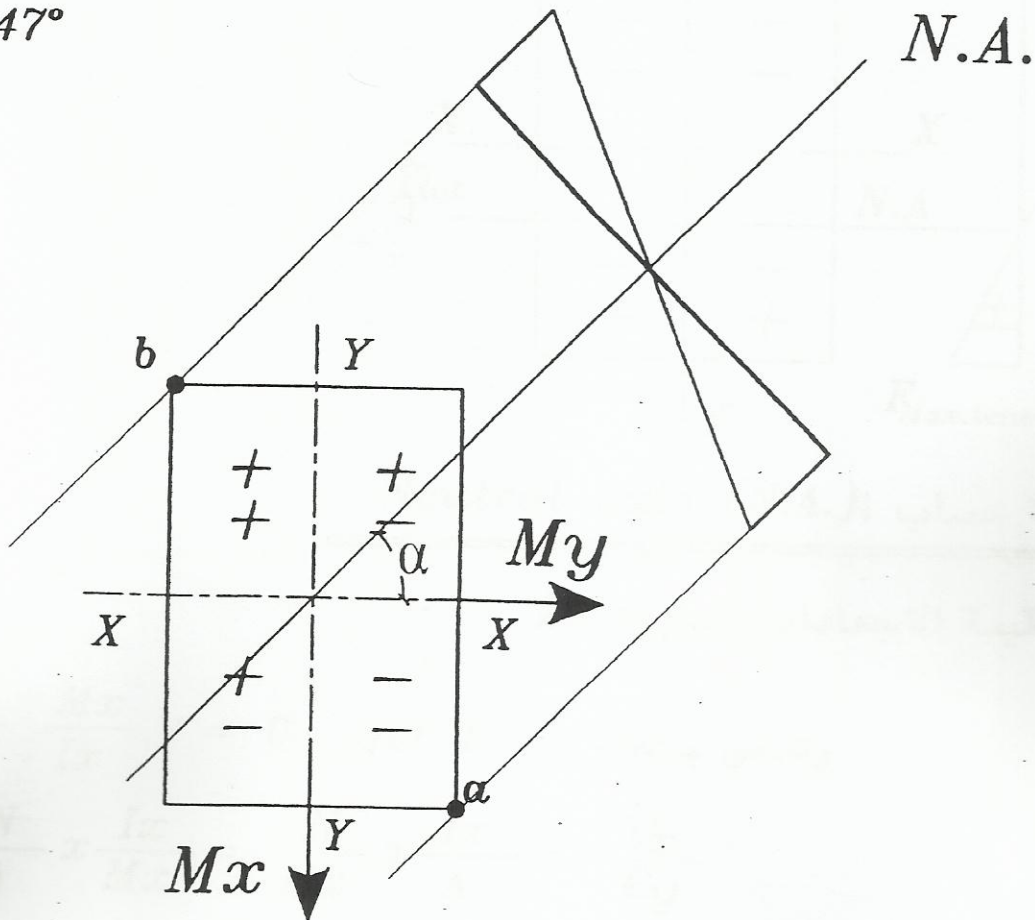
$$I_y = \frac{30 \times 20^3}{12} = 20000 \text{ cm}^4$$

or Neutral axis

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{My}{Iy} \times \frac{Ix}{Mx}$$

$$\tan \alpha = \frac{40}{20000} \times \frac{45000}{20} = 4.5$$

$$\alpha = 77.47^\circ$$

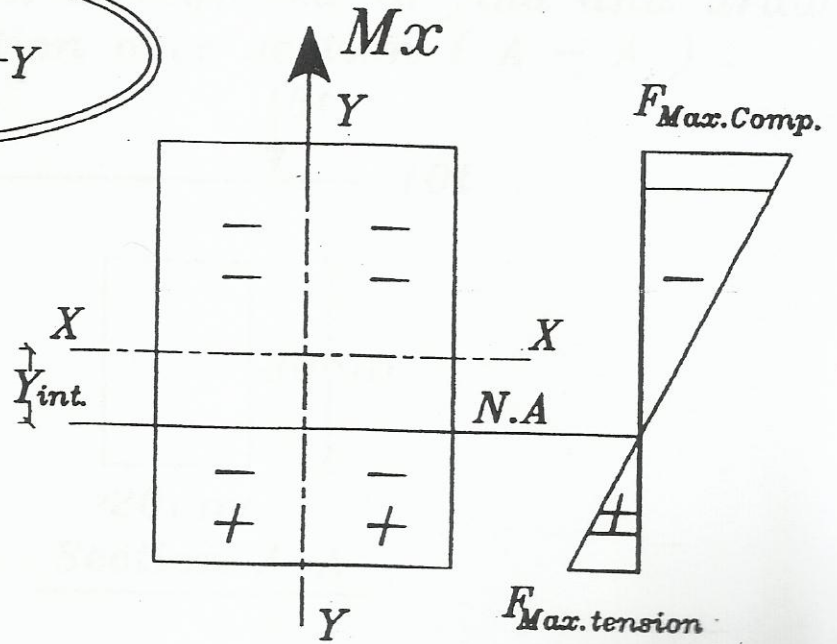


$$F_{\text{Max. comp.}} = F_a = -\frac{20 \times 10^5}{45000} \times 15 - \frac{40 \times 10^5}{20000} \times 10$$
$$= -2666.67 \text{ Kg / cm}^2$$

$$F_{\text{Max. tension}} = F_b = +\frac{20 \times 10^5}{45000} \times 15 + \frac{40 \times 10^5}{20000} \times 10$$
$$= +2666.67 \text{ Kg / cm}^2$$

- Case of (N , Mx) :

$$F = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y$$



طريقة حساب الـ Neutral axis (N.A.)

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y = 0 \quad \text{get } Y \quad Y_{int.} \text{ وتسمى بـ}$$

$$Y_{int.} = \frac{N}{A} \times \frac{Ix}{Mx} = \frac{N}{Mx} \times \frac{Ix}{A} = \frac{i_x^2}{e_y}$$

Where : $i_x^2 = \frac{Ix}{A}$, $e_y = \frac{Mx}{N}$

∴ الـ Neutral axis هو خط يوازي محور X و يبعد عنه مسافة $Y_{int.}$ و يتم

رسم الـ Neutral axis ناحية زيل السهم

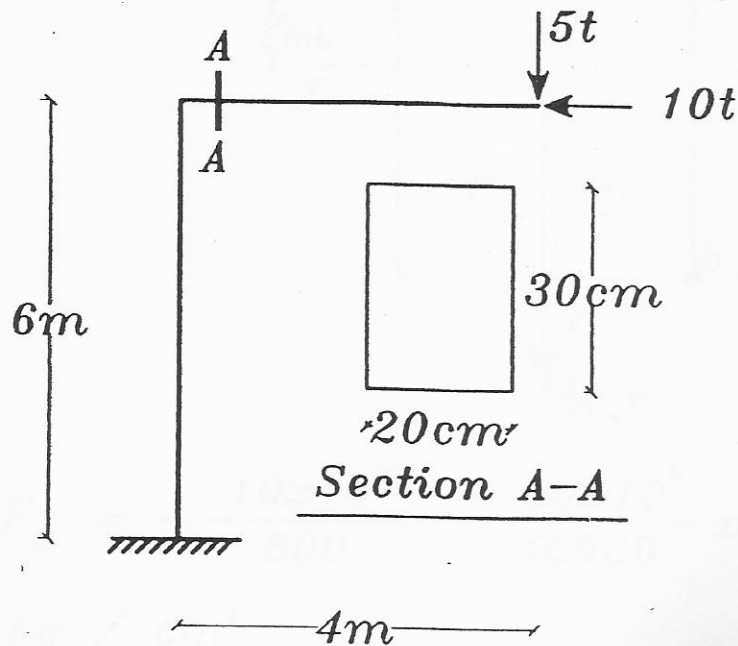
اذا كانت الـ Normal force (Compression)

و يتم رسم الـ Neutral axis ناحية رأس السهم

اذا كانت الـ Normal force (Tension)

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



$$N = - 10 t$$

$$M_x = 5 \times 4 = 20 \text{ m.t}$$

$$M_y = 0$$

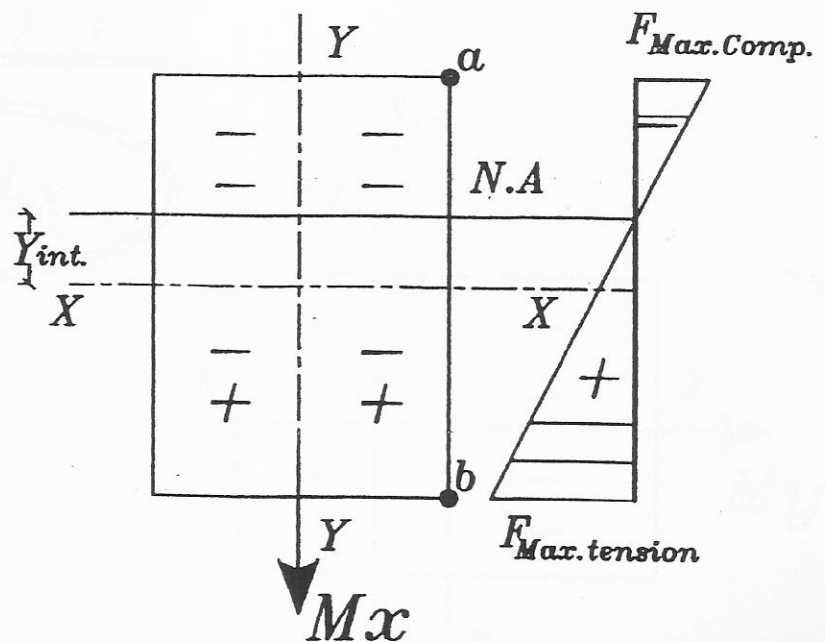
Case of N , M_x

$$I_x = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

$$A = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

For Neutral axis

$$Y_{int.} = \frac{N}{A} \times \frac{I_x}{M_x} = \frac{10t}{600} \times \frac{45000}{20 \times 100 \text{ cm.t}} = 0.375 \text{ cm}$$



$$F_{Max. comp.} = F_a = -\frac{10 \times 10^3}{600} - \frac{20 \times 10^5}{45000} \times 15$$

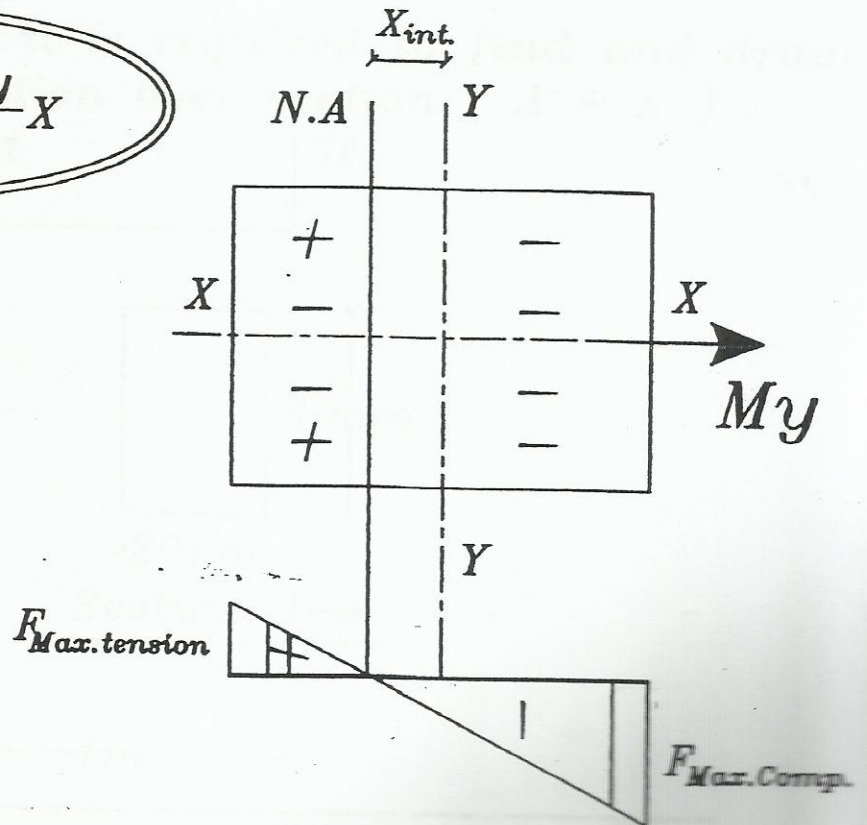
$$= - 683.333 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$F_{Max. tension} = F_b = -\frac{10 \times 10^3}{600} + \frac{20 \times 10^5}{45000} \times 15$$

$$= + 650 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

- Case of (N , My) :

$$F = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I_y} X$$



طريقة حساب ال (N.A.) Neutral axis

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\pm \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I_y} X = 0 \quad \text{get } X \quad \text{وتسمى بـ } X_{int.}$$

$$X_{int.} = -\frac{N}{A} \times \frac{I_y}{My} = -\frac{N}{My} \times \frac{I_y}{A} = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

Where :

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \quad e_x = \frac{My}{N}$$

∴ ال Neutral axis هو خط يوازي محور Y و يبعد عنه مسافة $X_{int.}$ و يتم

رسم ال Neutral axis ناحية زيل السهم

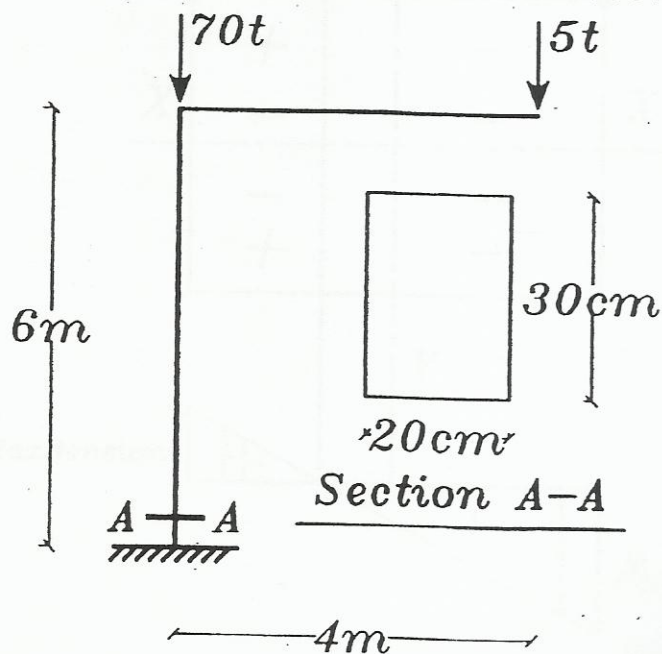
اذا كانت ال (Normal force (Compression

و يتم رسم ال Neutral axis ناحية رأس السهم

اذا كانت ال (Normal force (Tension

Example

For the shown frame it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



$$N = - 75 \text{ t}$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = 5 \times 4 = 20 \text{ m.t}$$

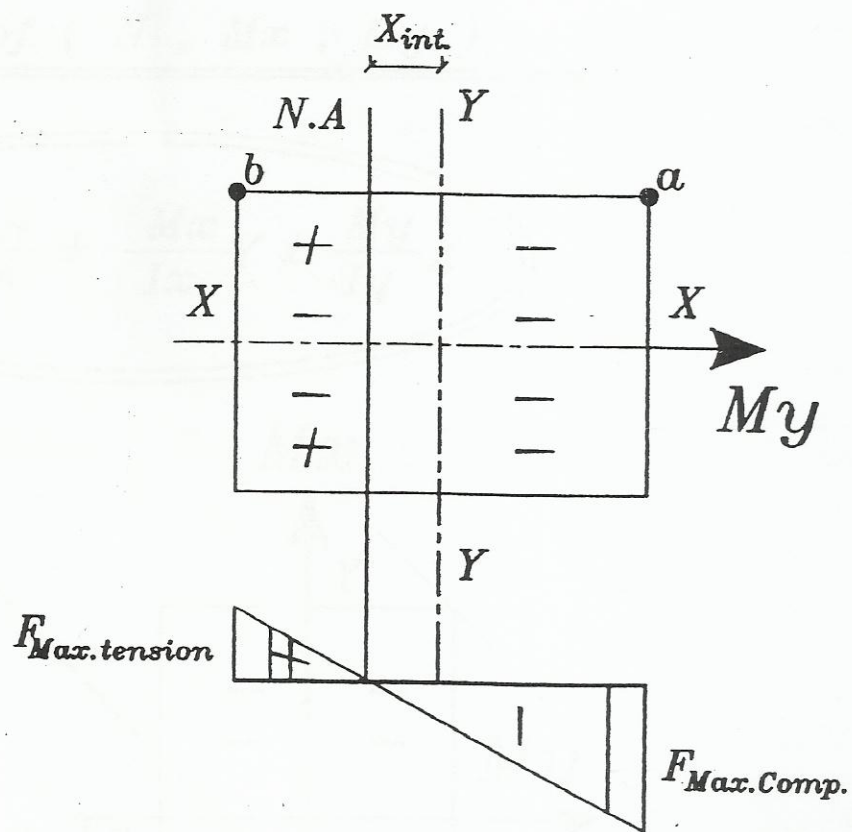
Case of N , M_y

$$I_y = \frac{30 \times 20^3}{12} = 20000 \text{ cm}^4$$

$$A = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

For Neutral axis

$$X_{int} = \frac{N}{A} \times \frac{I_y}{M_y} = \frac{75t}{600} \times \frac{20000}{20 \times 100 \text{ cm.t}} = 1.25 \text{ cm}$$



$$F_{Max. comp.} = F_a = -\frac{75 \times 10^3}{600} - \frac{20 \times 10^5}{20000} \times 10$$

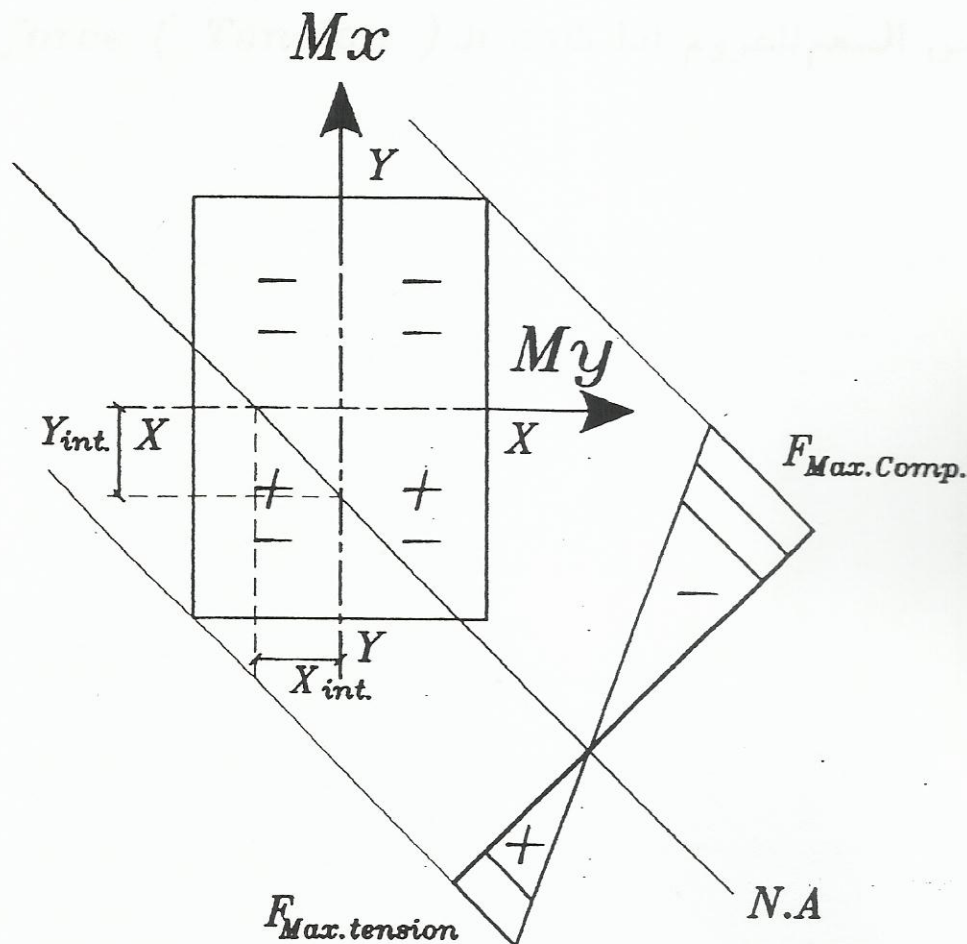
$$= -1125 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$F_{Max.tension} = F_b = -\frac{75 \times 10^3}{600} + \frac{20 \times 10^5}{20000} \times 10$$

$$= +875 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

- Case of (N , M_x , M_y) :

$$F = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} Y \pm \frac{M_y}{I_y} X$$



طريقة حساب (N.A.) Neutral axis

$$F = 0$$

عنده قيمة الاجهادات تساوي Zero

$$\pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} X \pm \frac{M_x}{I_x} Y = 0$$

$$X_{int.} = \frac{N}{A} \times \frac{I_y}{M_y} = \frac{N}{M_y} \times \frac{I_y}{A} = \frac{i_y^2}{e_x}$$

$$e_x = \frac{M_y}{N}$$

$$Y_{int.} = \frac{N}{A} \times \frac{I_x}{M_x} = \frac{N}{M_x} \times \frac{I_x}{A} = \frac{i_x^2}{e_y}$$

$$e_y = \frac{M_x}{N}$$

ال *Neutral axis* هو خط يبعد عن ال *C.g* مسافة X_{int} على

محور X و مسافة Y_{int} على محور Y و يتم رسم

ال X_{int} , Y_{int}

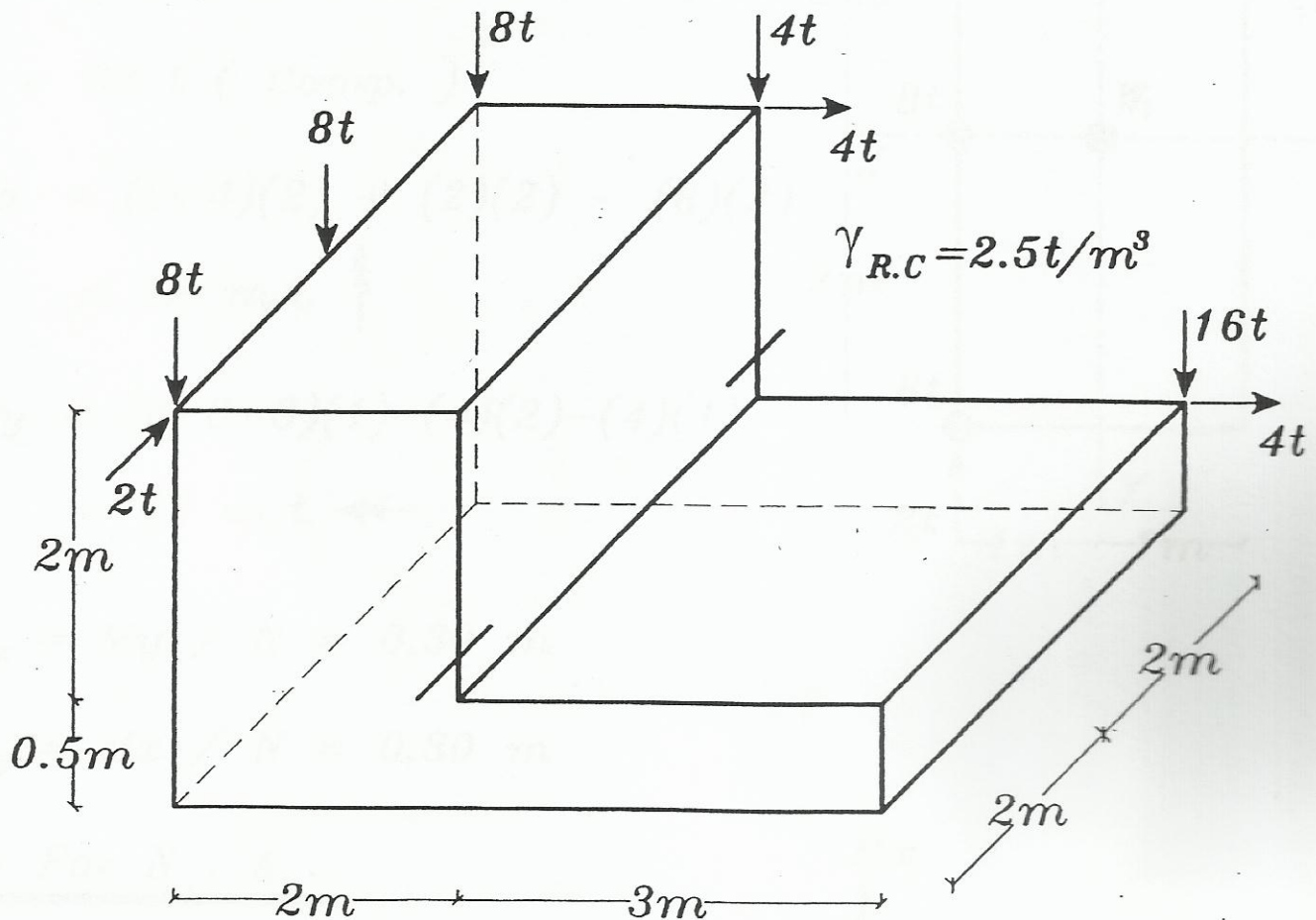
ناحية زيل السهم اذا كانت ال *Normal force (Compression)*

و يتم رسم ال X_{int} , Y_{int}

ناحية رأس السهم للعزوم اذا كانت ال *Normal force (Tension)*

Example

For the shown block it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



For sec A - A

1- Properties of area

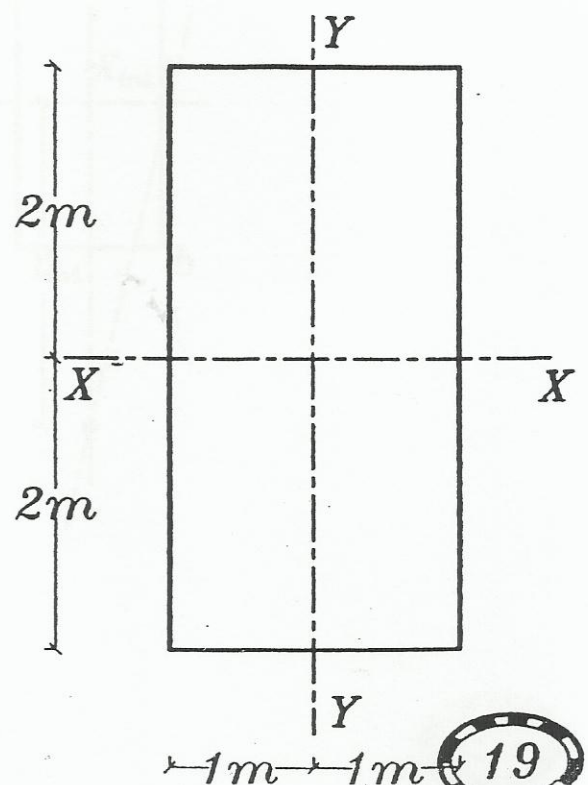
$$A = 4 \times 2 = 8 \text{ m}^2$$

$$I_x = 2 \times 4^3 / 12 = 10.667 \text{ m}^4$$

$$I_y = 4 \times 2^3 / 12 = 2.667 \text{ m}^4$$

$$i_x^2 = I_x / A = 1.333 \text{ m}^2$$

$$i_y^2 = I_y / A = 0.333 \text{ m}^2$$



Straining actions

$$W_1 = (4 \times 2 \times 2) (2.5) = 40 \text{ t}$$

$$N = (8 + 8 + 8 + 4 + W)$$

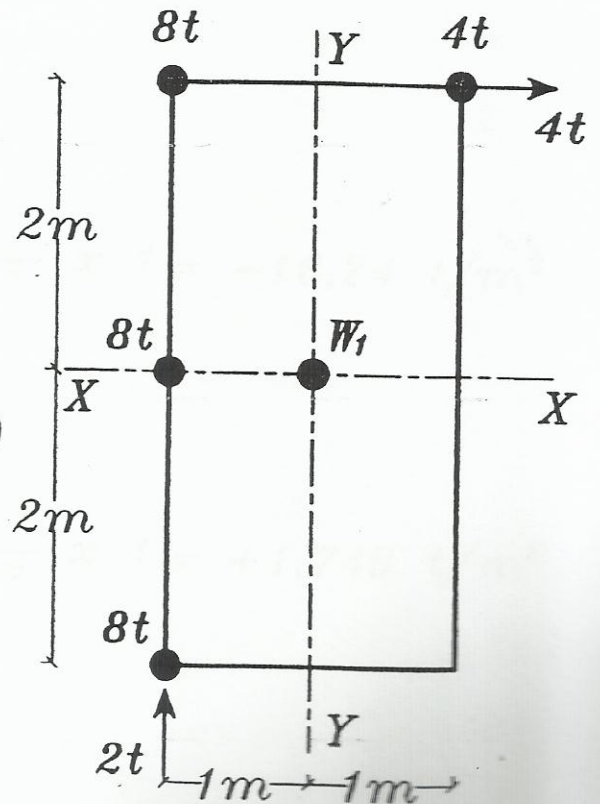
$$= 68 \text{ t (Comp.)}$$

$$M_x = (8+4)(2) + (2)(2) - (8)(2)$$

$$= 12 \text{ m.t. } \uparrow$$

$$M_y = (8+8+8)(1) - (4)(2) - (4)(1)$$

$$= 12 \text{ m.t. } \leftarrow$$



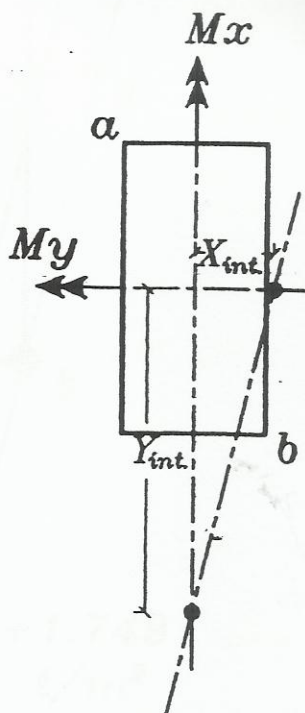
$$e_x = M_y / N = 0.30 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / N = 0.30 \text{ m}$$

3- For N . A .

$$X_{int.} = \frac{i_y^2}{e_x} = 1.11 \text{ m}$$

$$Y_{int.} = \frac{i_x^2}{e_y} = 4.44 \text{ m}$$



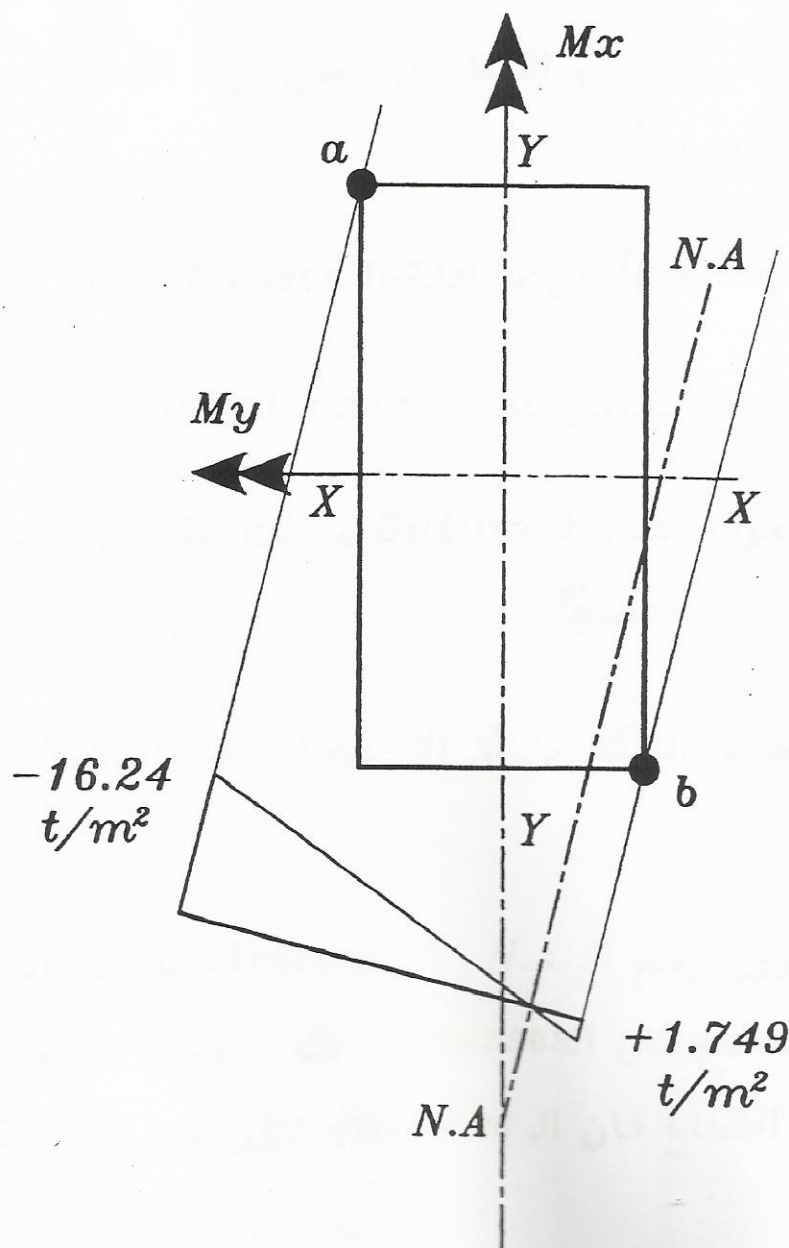
Normal stresses

$$F_a = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{I_x} Y \pm \frac{My}{I_y} X$$

$$F_a = - \frac{40}{8} - \frac{12}{10.667} \times 2 - \frac{12}{2.667} \times 1 = -16.24 \text{ t/m}^2$$

$$F_b = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{I_x} Y \pm \frac{My}{I_y} X$$

$$F_b = - \frac{40}{8} + \frac{12}{10.667} \times 2 + \frac{12}{2.667} \times 1 = +1.749 \text{ t/m}^2$$



١- نحدد القطاع المراد حساب ال *Normal stresses* له و نحدد خواص هذا القطاع (*A , C.g , Ix , Iy , i_x² , i_y²*)

٢- نحسب ال *Straining actions* و كذلك نحسب

$$e_x = My / N \quad e_y = Mx / N$$

٣- نحسب ال *Neutral axis* و نرسمه

٤- نحدد مكان النقط التي عندها *F_{Max.tension}* , *F_{Max.Comp.}*

وذلك عن طريق رسم موازى لل *N.A.* و النقط التي يمر فيها القطاع يكون عندهم *F_{Max.tension}* , *F_{Max.Comp.}*

٥- نحسب قيم *F_{Max.tension}* , *F_{Max.Comp.}* من معادلة ال *Normal stresses*

٦- نرسم ال *Datum* و يكون خط عمودى على ال *Neutral axis*

٧- نرسم قيم ال *stresses* عمودى على ال *Datum* و ذلك بمقياس رسم مناسب و نوصل *F_{Max.tension}* , *F_{Max.Comp.}*

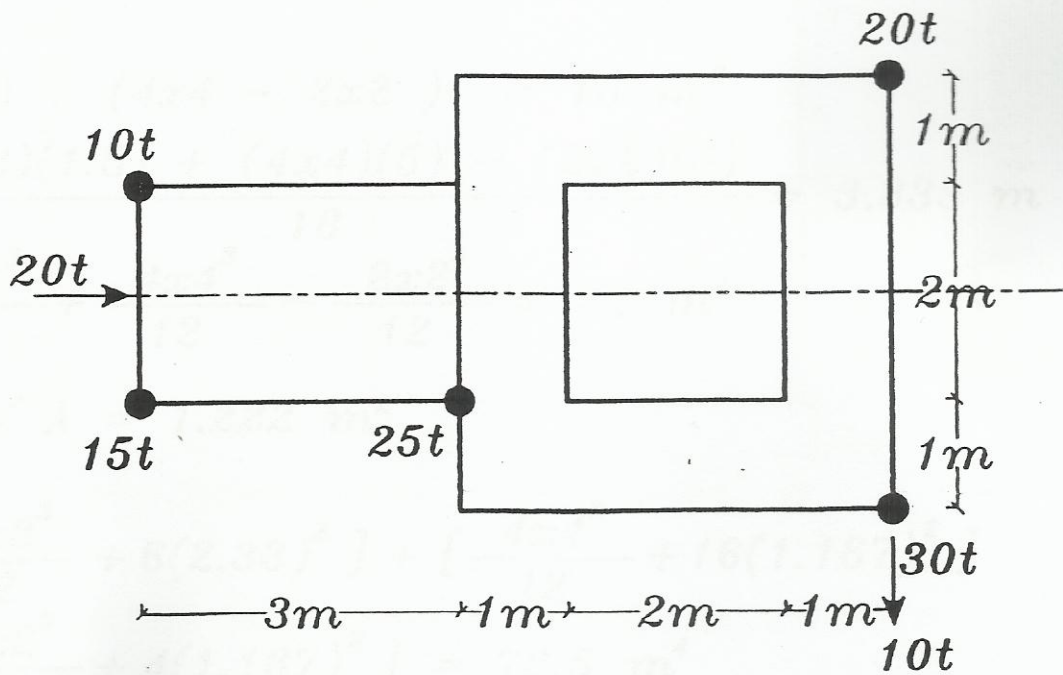
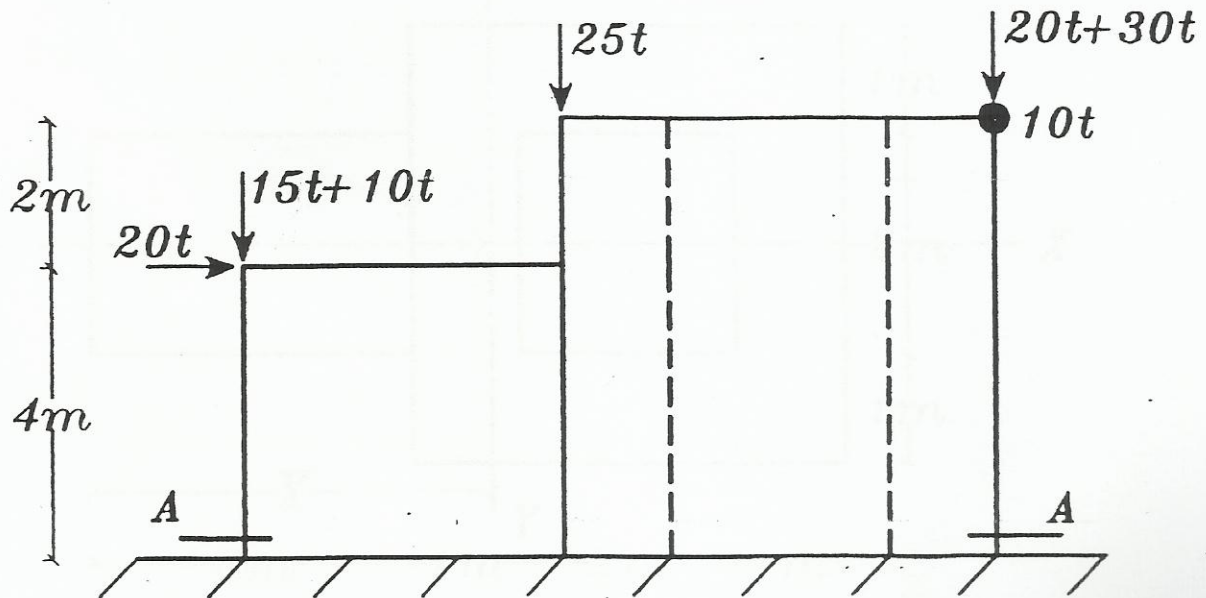
٨- نتأكد من صحة الرسم عن طريق التأكد من أن الاجهادات عند ال *N.A.* تسلوى صفر

٩- خذ بالك أ - ليس من الضرورى رسم ال *N.A.* و ال *stresses* مقياس الرسم
ب- اذا كان ال *N.A.* يقطع القطاع فان ال *stresses* تكون نوعين شد و ضغط
ج- اذا كان ال *N.A.* لا يقطع القطاع فان ال *stresses* تكون نوع واحد فقط شد او ضغط

CASE	N.A	COMMENT
N -only	لا يوجد	
Mx -only	محور X	
My -only	محور Y	
Mx, My	خط يمر بـ C.g و يميل بزاوية $\tan \alpha = \frac{My}{Iy} \times \frac{Ix}{Mx}$	يتم رسمه فى الاجزاء ذات الاشارات الغير متشابهة
N, Mx	خط يوازى محور X ويبعد عنه مسافة تساوى $Y_{int.} = \frac{i_x^2}{e_y}$	يتم رسمه ناحية ذيل سهم العزوم اذا كانت $N - Comp.$ و العكس صحيح
N, My	خط يوازى محور Y ويبعد عنه مسافة تساوى $X_{int.} = \frac{i_y^2}{e_x}$	يتم رسمه ناحية ذيل سهم العزوم اذا كانت $N - Comp.$ و العكس صحيح
N, My, Mx	خط مائل و يبعد عن C.g مسافات $X_{int.} = \frac{i_y^2}{e_x} \quad Y_{int.} = \frac{i_x^2}{e}$	يتم رسمه ناحية ذيل سهم العزوم اذا كانت $N - Comp.$ و العكس صحيح

Example

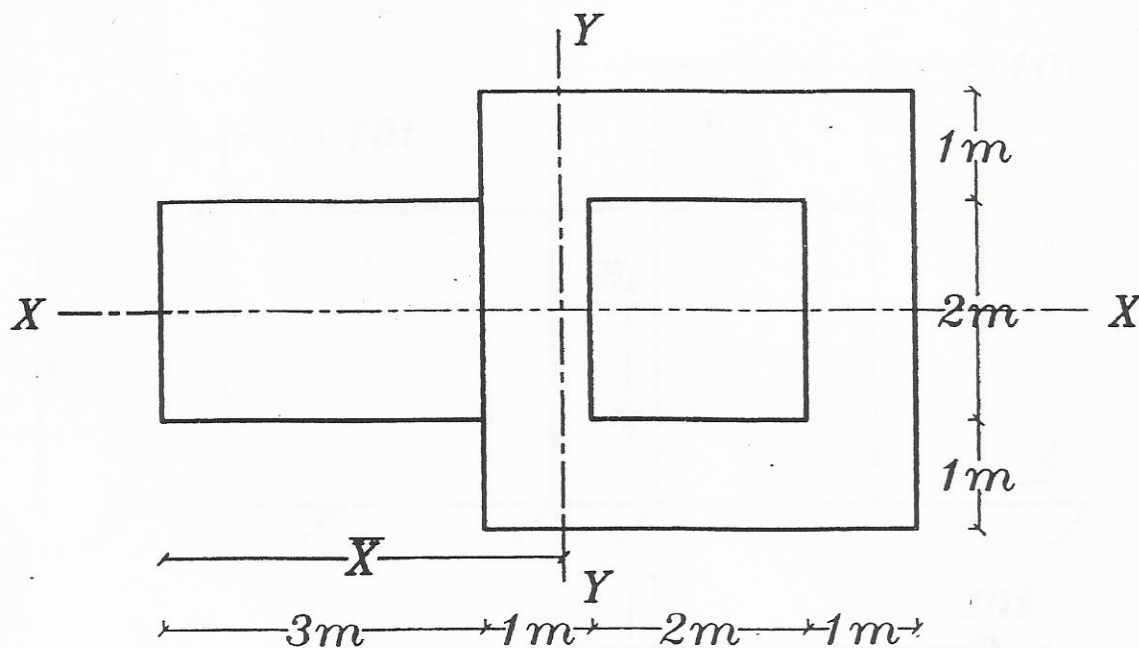
For the shown block it is required to find and draw normal stress distribution over section (A - A).



$$\gamma_{R.C} = 2.5t/m^3$$

or sec A - A

1- Properties of area



$$A = (3 \times 2) + (4 \times 4 - 2 \times 2) = 18 \text{ m}^2$$

$$\bar{X} = \frac{(3 \times 2)(1.5) + (4 \times 4)(5) - (2 \times 2)(5)}{18} = 3.833 \text{ m}$$

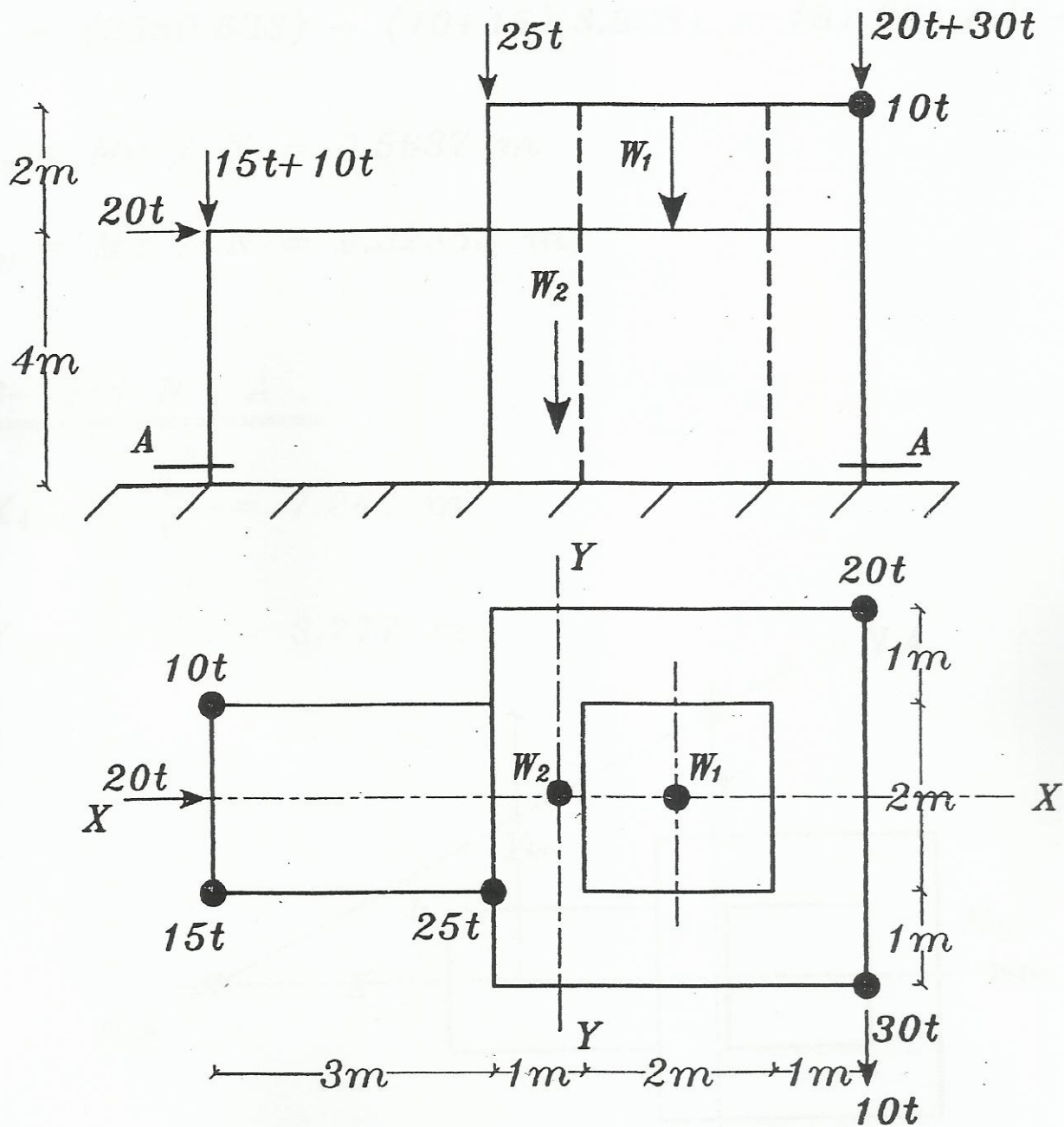
$$I_x = \frac{3 \times 2^3}{12} + \frac{4 \times 4^3}{12} - \frac{2 \times 2^3}{12} = 22 \text{ m}^4$$

$$i_x^2 = I_x / A = 1.222 \text{ m}^2$$

$$I_y = \left[\frac{2 \times 3^3}{12} + 6(2.33)^2 \right] + \left[\frac{4 \times 4^3}{12} + 16(1.167)^2 \right] - \left[\frac{2 \times 2^3}{12} + 4(1.167)^2 \right] = 73.5 \text{ m}^4$$

$$i_y^2 = I_y / A = 4.0833 \text{ m}^2$$

Straining actions



$$W_1 = (4 \times 4 - 2 \times 2) (2) (2.5) = 60 \text{ t}$$

$$W_2 = (18) (4) (2.5) = 180 \text{ t}$$

$$N = 10 + 15 + 25 + 30 + 20 + W_1 + W_2$$

$$= 340 \text{ t (Comp.)}$$

$$M_x = (15 \times 1) + (25 \times 1) + (30 \times 2) + (10 \times 6) - (10 \times 1)$$

$$- (20 \times 2) = 110 \text{ m.t}$$

$$M_y = (20+30)(3.167) + (W_1)(1.167) + (20 \times 4) \\ - (25 \times 0.833) - (10+15)(3.833) = 191.66 \text{ m.t} \rightarrow \rightarrow$$

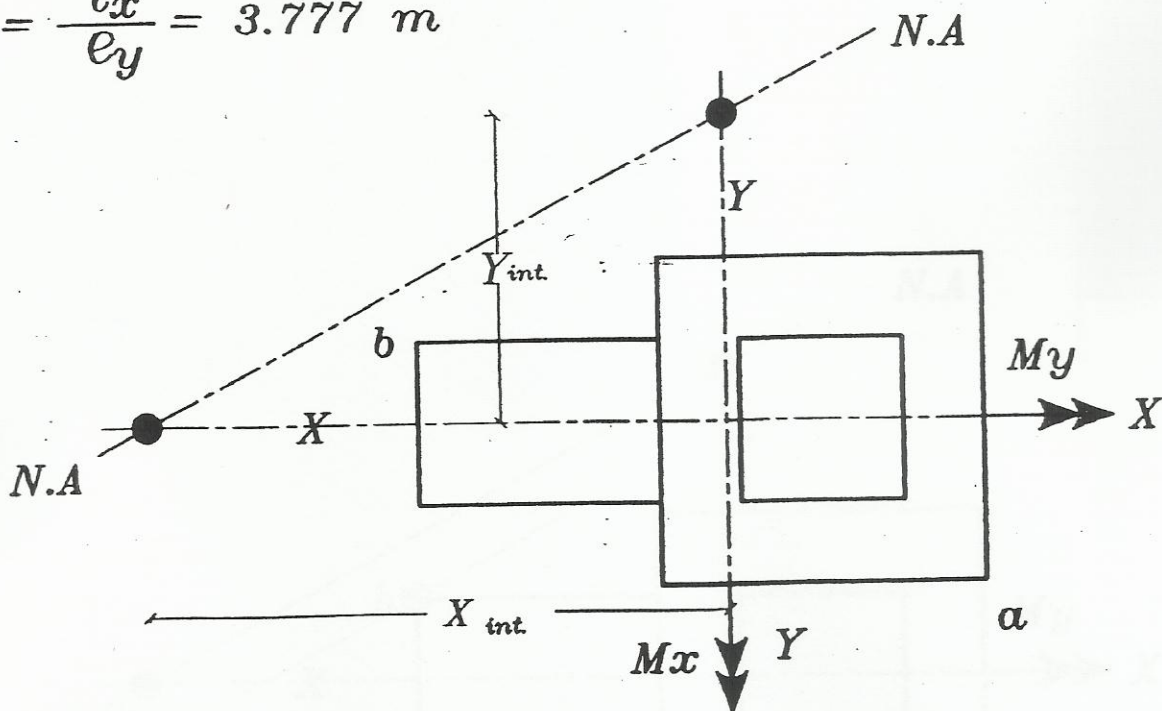
$$e_x = M_y / N = 0.5637 \text{ m}$$

$$e_y = M_x / N = 0.32353 \text{ m}$$

3- For N . A .

$$X_{int.} = \frac{i_y^2}{e_x} = 7.243 \text{ m}$$

$$Y_{int.} = \frac{i_x^2}{e_y} = 3.777 \text{ m}$$



Normal stresses

$$F_a = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y \pm \frac{My}{Iy} X$$

$$F_a = - \frac{340}{18} - \frac{110}{22} x 2 - \frac{191.66}{73.5} x 3.166 = -36.82 \text{ t/m}^2$$

$$F_b = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mx}{Ix} Y \pm \frac{My}{Iy} X$$

$$F_a = - \frac{340}{18} + \frac{110}{22} x 1 + \frac{191.66}{73.5} x 3.833 = -3.89 \text{ t/m}^2$$

